

ESTUDO DA TAXA DE VARIAÇÃO COMO FERRAMENTA PARA ANÁLISE DE CUSTOS NA ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

Karolliny Danielle Santos¹

Bruno Martins Moreira²

Marcos Daniel Monteiro³

RESUMO

Este artigo investiga a aplicação das taxas de variação no âmbito da Engenharia de Produção, com ênfase na análise de custos e investimentos a partir do uso do cálculo diferencial. O objetivo consiste em realizar simulações práticas, por meio de exemplos fictícios, para examinar o comportamento dos custos fixos, variáveis e totais, evidenciando como tais elementos podem subsidiar decisões estratégicas relacionadas a investimentos e ao controle dos processos produtivos. A fundamentação teórica apoia-se em referenciais clássicos de Cálculo e em estudos aplicados à área, enquanto os exemplos propostos demonstram como a utilização da primeira e da segunda derivada possibilita identificar pontos de maximização de lucros e de minimização de perdas, contribuindo para o aprimoramento da gestão produtiva.

Palavras-chave: Engenharia de Produção. Taxas de variação. Cálculo diferencial.

STUDY OF THE RATE OF CHANGE AS A TOOL FOR COST ANALYSIS IN PRODUCTION ENGINEERING

ABSTRACT

This article investigates the application of rates of variation in Production Engineering, with an emphasis on cost and investment analysis using differential calculus. The objective is to conduct practical simulations, using fictitious examples, to examine the behavior of fixed, variable, and total costs, highlighting how these elements can inform strategic decisions related to investments and the control of production processes. The theoretical foundation is based on classical calculus frameworks and applied studies in the field, while the proposed examples demonstrate how the use of the first and second derivatives makes it possible to identify points for maximizing profits and minimizing losses, contributing to the improvement of production management.

Keywords: Production Engineering. Rates of variation. Differential calculus.

Recebido em 20 de janeiro de 2026. Aprovado em 21 de abril de 2026

¹ Doutora em Engenharia de Produção pela Universidade Federal de Minas Gerais-UFMG. Possui graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual de Montes Claros (2011) e Mestrado em Engenharia de Produção pela Universidade Federal de Minas Gerais (2013). karollinny.ds@gmail.com

² Mestre em Educação Tecnológica no CEFET - MG, possui pós graduação em Gestão Industrial pela Fundação Getúlio Vargas, graduação em Engenharia de Produção pela Faculdade de Engenharia de Minas Gerais (2009). bruno.moreira@uemg.br

³marcosdvm2017@gmail.com

INTRODUÇÃO

A engenharia de produção desempenha papel fundamental na integração entre processos produtivos, gestão de recursos e análise de viabilidade econômica. Dentro desse escopo, a análise de preços constitui um elemento essencial, uma vez que conecta os custos de produção, a eficiência dos processos e a competitividade no mercado. Assim, compreender a relação entre engenharia de produção e análise de preços é indispensável para o desenvolvimento de estratégias sustentáveis e para a tomada de decisões em ambientes organizacionais cada vez mais dinâmicos.

A análise de preços, por sua vez, envolve o estudo dos custos de produção, da demanda, da concorrência e do valor percebido pelo consumidor. Entre os conceitos centrais, destacam-se o custo marginal, que indica o acréscimo de despesa para produzir uma unidade adicional, e as estratégias de precificação, que podem variar entre abordagens competitivas.

A interseção entre esses dois campos se manifesta na capacidade da engenharia de produção em fornecer dados técnicos e indicadores de desempenho, que servem de base para a formulação de políticas de preços, o que requer o domínio de ferramentas matemáticas que ajudem a quantificar e prever comportamentos econômicos. Entre essas ferramentas, destaca-se o cálculo diferencial e integral, cujo uso é essencial para compreender como variam os custos e receitas com base nas unidades produzidas. A análise das taxas de variação permite interpretar se uma função de custo está crescendo ou diminuindo, e com que intensidade, auxiliando o engenheiro a ajustar estratégias de produção.

Dessa forma, o presente trabalho fundamenta-se nos princípios do cálculo diferencial, em especial nas derivadas de primeira e segunda ordem, com o objetivo de modelar e analisar funções de custo e lucro. Para tanto, serão utilizados exemplos fictícios que simulam situações características do ambiente industrial. Ao final, discute-se a aplicabilidade prática dos resultados obtidos, evidenciando a relevância da matemática como instrumento de apoio à gestão produtiva e às decisões estratégicas em Engenharia de Produção.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Com o avanço dos sistemas produtivos e a crescente complexidade dos processos industriais, torna-se indispensável o uso de ferramentas cada vez mais sofisticadas para a análise de desempenho e a tomada de decisões. Nesse cenário, os modelos matemáticos assumem papel fundamental ao possibilitar a compreensão do comportamento de variáveis econômicas, como custos, lucros e investimentos. Entre os principais conceitos aplicados a essa análise, destaca-se a taxa de variação, formalmente descrita pela derivada no cálculo diferencial.

A derivada, em sua essência, expressa a taxa de variação de uma função em relação à sua variável independente. No âmbito da produção, por exemplo, é possível analisar de que maneira o custo total se altera à medida que a quantidade produzida aumenta. Tal informação, embora inicialmente pareça restrita ao campo matemático, revela-se fundamental para a formulação de decisões empresariais e operacionais. Nesse sentido, Anton e Rorres (2010) destacam que “a matemática aplicada à engenharia não é apenas uma linguagem formal, mas um método de pensamento para resolver problemas complexos e tomar decisões fundamentadas”.

A aplicação de derivadas no estudo de custos produtivos não é apenas teórica. Diversos trabalhos científicos demonstram como a matemática diferencial tem sido empregada para solucionar problemas reais em ambientes industriais. Como o de Silva et al. (2022) desenvolveram um modelo computacional que simula o comportamento do lucro a partir das derivadas das funções de receita e custo, demonstrando a eficácia da ferramenta na gestão de pequenas indústrias.

Outro exemplo é o estudo de Souza e Zamur (2020), que propuseram um modelo de custos para produção e distribuição de produtos químicos industriais, destacando a importância da previsão de custos marginais em diferentes cenários produtivos. Oliveira e Santos (2019) analisaram uma linha de produção de medicamentos utilizando o custeio baseado em atividades (ABC), e demonstraram como o conhecimento da variação de custos por processo auxilia na eficiência de operações e no controle gerencial.

Já Meyer e Lucinda (2013) realizaram um estudo empírico sobre a relação entre preço e custo marginal na indústria brasileira, mostrando a relevância do custo marginal na formação de preços competitivos. Lima (2016) apresentou uma revisão sobre a aplicação das derivadas na análise marginal de custos na economia, detalhando como as derivadas de primeira e segunda ordem podem ser usadas para prever comportamentos e otimizar processos decisórios.

Por fim, Cooper e Kaplan (2021) discutem o dilema dos métodos de custeio, propondo modelos conceituais que envolvem a análise de custos em diferentes estágios da produção, com ênfase em dados quantitativos derivados de funções custo-volume.

Esses estudos reforçam a importância da matemática como base analítica na Engenharia de Produção, oferecendo dados confiáveis e estratégias que podem ser aplicadas na prática com ganhos reais de eficiência.

DESENVOLVIMENTO

Segundo Stewart (2013), a derivada de uma função num ponto específico indica a inclinação da reta tangente à curva naquele ponto. Essa inclinação equivale à velocidade com que a variável dependente está se alterando naquele instante. Por exemplo, se a função $C(x)$ representa o custo total em função da quantidade produzida x , a derivada $C'(x)$ representa o custo marginal, ou seja, o custo de se produzir mais uma unidade.

Além disso, a derivada permite não apenas avaliar tendências locais, mas também compreender a sensibilidade do sistema a mudanças pequenas, o que é fundamental na análise de processos industriais, como destacam Chiang e Wainwright (2006). A partir da observação do comportamento da taxa de variação, é possível, inclusive, identificar o ponto em que se obtém o melhor equilíbrio entre custo e produção, o que é fundamental em qualquer estratégia de produção eficiente.

Matematicamente, se $C(x)$ é a função de custo total, então $C'(x)$ representa o custo marginal. O custo marginal representa o acréscimo no custo total resultante da produção de uma unidade adicional. Essa análise assume relevância central para a Engenharia de Produção, uma vez que possibilita avaliar a viabilidade de expandir ou não a produção. Quando o custo marginal é inferior à receita marginal, a elevação do volume produzido tende a ser lucrativa; em contrapartida, quando ocorre o inverso, a expansão pode resultar em prejuízos.

Nesse sentido, Ferreira et al. (2021) enfatizam que “a compreensão do custo marginal permite ao engenheiro ajustar os volumes de produção de forma dinâmica, evitando desperdícios e maximizando a rentabilidade”. Essa abordagem se mostra especialmente pertinente em contextos marcados por custos variáveis elevados, como ocorre em indústrias que dependem de insumos importados ou do consumo intensivo de energia elétrica. Nesses casos, a tomada de decisão não deve se restringir à observação dos custos médios, mas deve priorizar a análise da tendência de variação desses custos, informação que pode ser obtida por meio do uso da derivada.

A derivada de segunda ordem, representada por $C''(x)$, fornece informações sobre a concavidade da função de custo. Se $C''(x) > 0$, a função é côncava para cima, o que indica que o custo marginal está aumentando, situação comum em processos produtivos com economias de escala decrescentes. Se $C''(x) < 0$, há concavidade para baixo, ou seja, o custo marginal está diminuindo, refletindo ganhos de escala.

Como explicam Lima, Santos e Guimarães (2020), “a análise da segunda derivada permite detectar mudanças qualitativas no comportamento dos custos, como o ponto de inflexão entre economia e deseconomia de escala”. Tornando-se, assim, uma ferramenta poderosa para identificar limites operacionais e o ponto ótimo de operação industrial.

A compreensão dos diferentes tipos de custos é fundamental para a aplicação correta das ferramentas matemáticas. Custos fixos são aqueles que permanecem constantes, independentemente da quantidade produzida, como aluguel, salários administrativos e depreciação de equipamentos. Custos variáveis, por sua vez, aumentam proporcionalmente com a produção, como matéria-prima e mão de obra direta. A soma de ambos constitui o custo total, que pode ser representado por funções polinomial do segundo grau, do tipo $C(x) = ax^2 + bx + c$, sendo a , b e c constantes positivas e $a \neq 0$.

De acordo com Pereira e Costa (2018), a modelagem matemática dos custos é um dos primeiros passos para o controle eficiente dos processos produtivos. O uso de funções polinomiais permite captar com mais precisão os comportamentos não lineares, como o aumento desproporcional do custo conforme a produção se aproxima da sua capacidade máxima.

Funções de custo são, em geral, funções contínuas, deriváveis e crescentes, pois, à medida que se aumenta a produção, espera-se que o custo também cresça. No entanto, essa variação nem sempre é linear. Muitas vezes, o custo cresce de forma acelerada, especialmente em produções próximas ao limite da capacidade.

A derivada dessas funções permite identificar intervalos de crescimento mais eficiente, ou seja, pontos em que o custo marginal ainda é relativamente baixo em relação à quantidade produzida. Segundo Santos e Ribeiro (2019), “a análise matemática do custo marginal é crucial para determinar o ponto de operação ótima, onde há o melhor equilíbrio entre volume produzido e custo incremental”.

Ao estudar a função de receita $R(x)$ e a função de custo $C(x)$, é possível identificar o lucro $L(x)$ que é representado pela diferença entre elas, ou seja, o lucro $L(x)$ é máximo, em:

$$L(x) = R(x) - C(x) \quad (1)$$

Além disso, o ponto corresponde ao valor de x em que $L'(x) = 0$, e pode ser confirmado por meio de $L''(x) < 0$, garante que há um máximo local. Trata-se de um exemplo clássico de aplicação da derivada para decisões produtivas.

METODOLOGIA

Este trabalho se caracteriza como uma pesquisa teórica de abordagem qualitativa e quantitativa, com ênfase na aplicação de conceitos matemáticos, especificamente as derivadas, ao contexto da Engenharia de Produção. O objetivo é demonstrar, por meio de exemplos e simulações numéricas, como a análise de taxas de variação pode contribuir para o entendimento e o controle dos custos produtivos.

Do ponto de vista metodológico, foi realizada uma revisão bibliográfica com base em obras clássicas e contemporâneas da área de Cálculo e Engenharia Econômica. Foram consultados livros didáticos, artigos científicos indexados em bases acadêmicas como Scielo, Google Scholar e revistas da área de Engenharia de Produção.

O critério de seleção das obras priorizou publicações que discutem:

- O uso da derivada como ferramenta de análise econômica;
- Modelagem matemática de custos industriais;
- Aplicações do custo marginal em decisões estratégicas de produção;
- Estudos de caso reais ou simulados na indústria.

Além da revisão teórica, foram elaborados exemplos numéricos simulados, fictícios, baseados em funções polinomiais, para representar situações típicas da indústria, como:

- ☐ Determinação do custo marginal;
- ☐ Localização do ponto de produção ótima;
- ☐ Análise da concavidade da função de custo via segunda derivada.

Esses exemplos foram desenvolvidos com o auxílio de ferramentas computacionais, como o software GeoGebra, que permitiu a construção de gráficos das funções estudadas, e o Excel, para simulação de tabelas e análise dos dados. A escolha dessas ferramentas se deu pela sua acessibilidade e precisão gráfica, facilitando a visualização e interpretação dos resultados.

Dessa forma, a metodologia adotada neste artigo foi pensada para atender ao objetivo de evidenciar a relevância das taxas de variação (derivadas) no processo decisório relacionado a custos e investimentos em sistemas de produção, por meio da articulação entre teoria, simulações e análise gráfica.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção, apresentam-se os resultados obtidos a partir de exemplos numéricos simulados, com base nas funções de custo aplicadas à Engenharia de Produção. O objetivo é ilustrar como a análise da primeira e da segunda derivada de funções de uma variável pode auxiliar na tomada de decisões estratégicas, como o aumento da produção, o controle de custos e a definição do ponto de operação ideal.

Todos os cálculos foram realizados com exemplos fictícios de forma a simular um ambiente controlado, utilizando funções com comportamento semelhante ao observado em sistemas produtivos reais. Foram utilizados apoio de softwares computacionais como Excel e GeoGebra, visando garantir precisão na análise gráfica e na interpretação dos resultados.

1. Aplicação 1: (Análise do custo marginal) Considere a seguinte função de custo total, apresentada abaixo:

$$C(x) = 5x^2 + 20x + 1000 \quad (2)$$

Onde:

- ☐ $C(x)$ representa o custo total, em reais;
- ☐ x representa o número de unidades produzidas.

A derivada de primeira ordem (custo marginal) é dada por:

$$C'(x) = 10x + 20$$

(3)

Essa derivada indica que, a cada nova unidade produzida, o custo adicional cresce linearmente. Para diferentes níveis de produção. Veja a simulação da produção de x unidades na Tabela 1, abaixo:

Tabela 1 - Unidades produzidas x custo marginal.

Unidades produzidas (x)	Custo marginal $C'(x)$ (R\$)
10	120
20	220
30	320
40	420

Fonte: Elaborada pelos autores, 2025.

A interpretação desses dados permite concluir que a produção se torna cada vez mais cara à medida que se produz mais, um comportamento típico em sistemas onde há deseconomias de escala. Essa informação é fundamental para os gestores decidirem até onde é vantajoso produzir, especialmente quando comparada à receita marginal.

2. Aplicação 2: (Identificação do ponto de produção ótima) Considere a função de lucro definida como:

$$L(x) = -5x^2 + 300x - 2000$$

(4)

A derivada de primeira ordem de $L(x)$ é dada por:

$$L'(x) = -10x + 300 \quad (5)$$

Para encontrar o ponto de lucro máximo de x unidades, igualamos a função a zero, obtendo:

$$L'(x) = 0 \Rightarrow -10x + 300 = 0 \Rightarrow x = 30$$

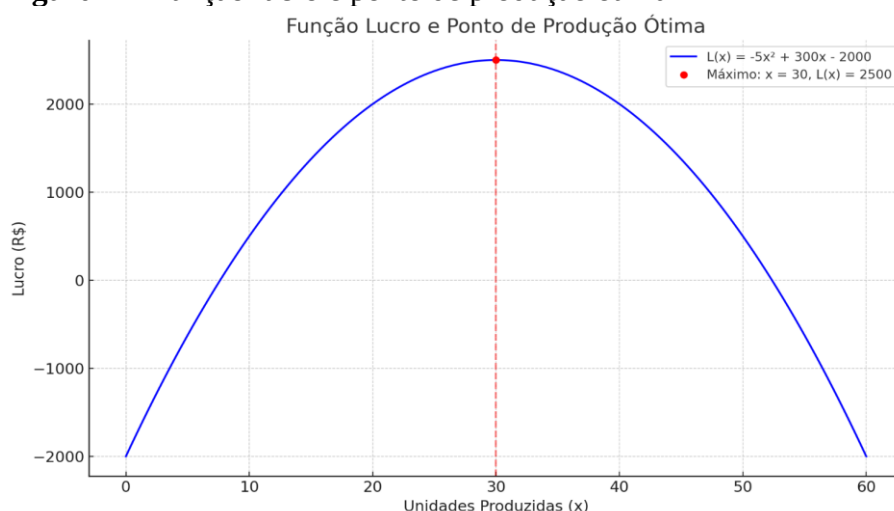
(6)

Para a verificação do ponto de máximo, é necessário encontrar a derivada de segunda ordem é:

$$L''(x) = -10 \quad (7)$$

Como $L''(x) < 0$, temos um máximo local. Ou seja, o lucro máximo ocorre quando a produção é de 30 unidades. Logo, esse é o ponto ótimo de produção de x unidades para o exemplo em questão, qualquer valor diferente desse não é interessante a ser trilhado. Um gráfico da função lucro é apresentado na Figura 1.

Figura 1 – Função lucro e ponto de produção ótima



Fonte: Elaborada pelos autores (2025).

Essa análise evidencia como a matemática pode apontar o ponto exato em que a produção gera o maior retorno financeiro, evitando tanto a subprodução quanto o excesso de produção que reduz o lucro.

3. Aplicação 3: (Análise da aceleração do custo) Considere a função $C(x) = 2x^3 - 30x^2 + 300x + 1000$, na qual representa uma função polinomial do terceiro grau, onde se encontra um comportamento mais complexo, com diferentes fases de crescimento de custo. Derivando a função, obtém-se:

$$C'(x) = 6x^2 - 60x + 300 \text{ (primeira derivada)}$$

(8)

$$C''(x) = 12x - 60 \text{ (segunda derivada)} \quad (9)$$

Fazendo $C''(x) = 0$, encontramos o ponto de inflexão:

$$C''(x) = 12x - 60 = 0 \Rightarrow x = 5$$

(10)

Isso significa que, quando a produção ultrapassa 5 unidades, o comportamento da curva de custo muda: o custo passa a crescer mais rapidamente. A Figura 2, ilustra a função e o ponto de inflexão.

Figura 2 - Função de custo com ponto de inflexão



Fonte: Elaborada pelos autores (2025).

Esse tipo de análise auxilia o engenheiro de produção a entender quando vale a pena escalar a produção e quando o crescimento do custo começa a afetar negativamente a margem de lucro.

As três aplicações apresentadas demonstram de forma prática como as derivadas, tanto de primeira quanto de segunda ordem, podem ser utilizadas para extrair informações decisivas no ambiente produtivo. Ao analisar o custo marginal, é possível evitar decisões que levem ao aumento desnecessário de gastos. Com a identificação do ponto ótimo de lucro, a produção pode ser ajustada de forma mais estratégica.

Os dados apresentados dialogam com os estudos de Ferreira et al. (2021), que reforçam a importância de ferramentas matemáticas na gestão industrial, e com Lima e Rocha (2021), que mostram como a análise de inflexão de custos contribui para o uso eficiente de energia e recursos.

Além disso, a análise gráfica amplia a interpretação da derivada, permitindo visualizar a transição entre fases de eficiência e ineficiência produtiva. Em ambientes competitivos e altamente dinâmicos, como os que envolvem manufatura, logística ou processos contínuos, essas análises não são apenas úteis, são indispensáveis.

Por fim, os resultados confirmam que a linguagem matemática não apenas descreve a produção, mas também guia sua otimização, fornecendo aos gestores os instrumentos necessários para operar com eficiência, previsibilidade e controle.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise de custos e investimentos é uma atividade essencial para a tomada de decisões estratégicas na Engenharia de Produção. Este estudo demonstrou como as taxas de variação, obtidas por meio das derivadas de primeira e segunda ordem, oferecem uma poderosa ferramenta para compreender o comportamento das funções de custo, receita e lucro em sistemas produtivos.

A partir da fundamentação teórica e dos exemplos simulados, foi possível observar que a derivada de primeira ordem (custo marginal) permite determinar quanto custa produzir uma unidade adicional, auxiliando no controle do crescimento dos custos variáveis. Já a derivada de

segunda ordem revelou-se eficaz na identificação de pontos de inflexão, úteis para prever mudanças na tendência de crescimento dos custos e ajustar as operações produtivas.

Os resultados obtidos com os exemplos práticos reforçam a importância da aplicação de modelos matemáticos para a otimização da produção, contribuindo com decisões mais racionais, fundamentadas em dados concretos. Além disso, a utilização de ferramentas como GeoGebra e Excel mostrou-se eficaz na simulação gráfica e numérica das funções estudadas.

Portanto, conclui-se que o domínio do cálculo diferencial, especialmente do conceito de derivada, é indispensável para o engenheiro de produção moderno. As taxas de variação, quando bem interpretadas, não apenas explicam o comportamento dos custos, mas também orientam o caminho mais eficiente e sustentável para o crescimento industrial.

Espera-se que este trabalho contribua para fortalecer a conexão entre os conhecimentos matemáticos e as práticas produtivas reais, incentivando o uso do cálculo como base para a engenharia baseada em dados, decisões e resultados.

Como proposta para trabalhos futuros, sugere-se aplicar esses conceitos a um estudo de caso com dados reais de uma empresa industrial, de modo a validar os modelos utilizados. A integração com ferramentas de simulação computacional e algoritmos de aprendizado de máquina pode ampliar as possibilidades de previsão do comportamento de custos, contribuindo para uma tomada de decisão mais precisa e orientada por dados.

REFERÊNCIAS

Anton, H., & Rorres, C. (2012). **Álgebra Linear com Aplicações**-10. Bookman Editora.

CHIANG, A. C.; WAINWRIGHT, K. **Métodos de análise matemática para economia**. 4. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006.

COOPER, R.; KAPLAN, R. S. **O dilema dos métodos de custeio e das ferramentas de gerenciamento de custos: uma proposta conceitual**. *Research, Society and Development*, v. 10, n. 9, 2021. DOI:10.33448/rsd-v10i9.18638.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008. LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. A. *Fundamentos de metodologia científica*. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

LIMA, A. C. **As derivadas e a sua aplicação na análise marginal de custos na economia**. Revista Científica Semana Acadêmica, Fortaleza, 2016. Disponível em: <https://semanaacademica.org.br/artigo/derivadas-e-sua-aplicacao-na-analise-marginal-de-custos-na-economia>. Acesso em: 15 jun. 2025.

MEYER, L. G.; LUCINDA, C. R. **Relação entre preço e custo marginal na indústria brasileira**. Estudos Econômicos (São Paulo), v. 43, n. 4, 2013. DOI:10.1590/S0101-41612013000400003.

OLIVEIRA, F. C. P.; SANTOS, A. M. dos. **Custo e resultado em uma linha de produção de medicamentos: abordagem pelo custeio baseado em atividades (ABC)**. *Produção*, v. 29, 2019. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/prod/a/yKvbjzxK7xMyt78H3zXTxsR/>. Acesso em: 15 jun. 2025.

SOUZA, E. L.; ZAMUR, E. P. **Modelo de custos para a produção e distribuição de produtos químicos industriais**. *Gestão & Produção*, v. 27, 2020. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/gp/a/k7m5pmkdpzScHbRmFzx8pB/>. Acesso em: 15 jun. 2025.

STEWART, J. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.